Hvorfor kan vi ikke bare bruge rene kvinter og stortertser?

Problemet med alle de stemninger, der tager udgangspunkt i rene tertser eller rene kvinter, de vil løbe ind i problemer omkring *en-harmoniske toner* - dvs toner som hedder noget forskelligt men har samme tangent på klaveret (fx eb og d#, ab og g# men også toner som c og h#).

Hvis vi regner med rene store tertser kan vi finde tonen h# ved at se på c - e - g# - h#. Går vi 4 store tertser op og derefter en oktav ned så har vi tonerne c-h#.

På et normalt stemt klaver siger vi at det er samme tone, og dermed at frekvensforholdet er 1:1, men det bliver det ikke når vi tager udgangspunkt i rene tertser

Her får vi nemlig

$$\left(\frac{5}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \qquad .976563$$

dvs at His er mindre end C (en hel del) hvis vi regner med rene store tertser

Hvis vi derimod regner med rene kvinter så kommer vi til his ved at gå 12 kvinter op:

c - g - d - a- -e - h - f# - c# - g# - d# - a# - e# - h#

Men vi skal 7 oktaver ned igen for at komme "tilbage"

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 \qquad 1.01364$$

Regner vi med rene kvinter bliver vores his altså lidt for stor.

Derfor går al temperering ud på at gøre de store tertser lidt større og/eller kvinterne lidt mindre.

Den prætorianske stemning

I den Prætorianske stemning tager vi udgangspunkt i at de store tertser er rene og så tilpasser vi *alle* kvinterne så de bliver formindsket lige meget.

På den måde er der elementer af den Pytagoræiske stemning, hvor vi stemmer i rene kvinter. Her stemmer vi nemlig også i kvinter, de er bare ikke rene. Og derved får vi samme problem som i den rene stemning at kvint-cirklens to ender aldrig medes.

Samtidig er der også elementer af den ligesvævende stemning idet man fordeler et problem på flere intervaller i stedet for som den rene stemning, hvor man udvælger nogle kvinter som rene og så bare accepterer at der bliver tre kvinter tilbage som *Ikke* er rene.

Vi skal derfor stadigvæk tage stilling til hvordan de sorte tangenter skal stemmes. Dette valg forsvinder først med den lige-svævende stemning. Vi vælger følgende toner – her stillet op i kvint-afstand:

Es – Bb – F – C – G – D – A – E – H – F# - C# - G#

Da de store tertser skal være rene har vi at frekvensforholdet mellem de røde toner er rene stortertser, dvs at frekvensforholdet er 5/4

Es – Bb – F – C – **G** – D – A – E – **H** – F# - C# - G#

Tilsvarende gælder for de grønne toner nedenfor:

Es – **Bb** – F – C – G – **D** – A – E – H – **F#** - C# - G#

... og for de blå

Es – Bb – **F** – C – G – D – **A** – E – H – F# - **C#** - G#

... og for de violette

Es – Bb – F – **C** – G – D – A – **E** – H – F# - C# - **G#**

Problemet er nu bare hvordan vi får de forskellige linier til at hænge sammen. Hvilket frekvensforhold skal vi bruge mellem Es og Bb? Og mellem Bb-F? og mellem F-C?

Svaret er at det ved vi ikke, **men det skal være det samme**!

Hvis vi kalder frekvensforholdet hørende til denne kvart-komma-formindskede kvint være den ubekendte størrelse **k** så kan vi opstille en ligning for denne værdi.

Vi kan nemlig se på hvordan vi kan komme fra tonen C og så 4 kvinter op. Husk på at vi *ikke* kender frekvensforholdet for en kvint, men at det er det samme mellem alle kvinter, og også at alle stor-tertser er rene altså svarer til frekvensforholdet 5/4. Samtidig er det underforstået at oktaven er ren og svarer til frekvensforholdet 2.

Es – Bb – F – **C – G – D – A – E** – H – F# - C# - G#

Hvis vi 4 gange går en kvart-komma-formindsket kvint op, så er frekvensen vokset med en faktor k^4.

Da vi derved er gået 2oktaver + stor-terts op så svarer det også til at frekvensen er vokset med en faktor

$$2 \cdot 2 \cdot \frac{5}{4} = 5$$

Vi har altså at $k^4 = 5 \Leftrightarrow k = \sqrt[4]{5} = 1.49535$

Til sammenligning kan vi se at den rene kvint svarer til 1.5 og den ligesvævende svingning svarer til $(\sqrt[12]{2})^7 = 1.49831$

I den Prætorianske skala er kvinterne meget små

Ud fra tonen C findes tonen e som den rene stor-terts med frekvensforholdet 5/4 og gis som den rene storterts over med frekvensforholdet 25/16.

Tonen f findes som en kvint under og benytter vi skrivemåden $k = \sqrt[4]{5}$ så ligger f en kvint under C og har dermed frekvensforholdet 1/k. Men for at få tonen i oktaven over vores C skal vi en oktav op:

F: 2/k

Ud fra f finder vi de rene stortertser som a: 2/k * 5/4 = 5/2k og cis: 2/k * 25/16 *1/2 = 25/(16k) . For tonen cis ganger vi ½ på for at få den ned i den rigtige oktav

Tilsvarende findes tonen Bb som en kvint under f og en oktav op dvs

Bb: 2/(k*k)*2 = $4/k^2$

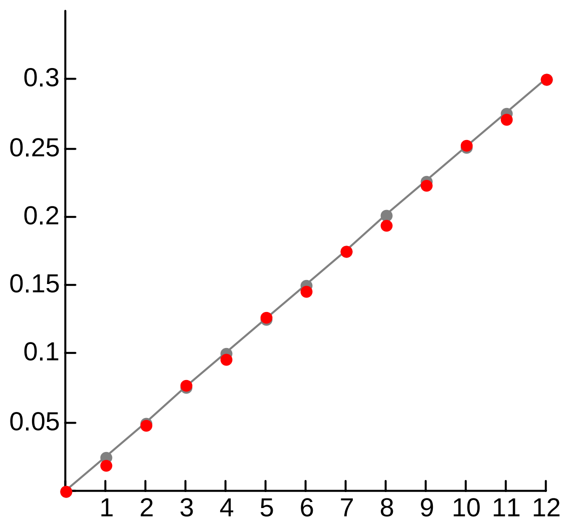
D: $4/k \wedge 2 \cdot 5/4 \cdot 1/2 = \dfrac{5}{2 \cdot k^2}$ igen ganger vi ½ på fordi vi er kommet en oktav for højt

Fis: $\dfrac{5}{2 \cdot k^2} \cdot \dfrac{5}{4} = \dfrac{25}{8 \cdot k^2}$

Fortsætter vi på den måde får vi hele rækken af frekvensforhold som følger

$$Lpraet := \left\{1, \frac{25}{16 \cdot k}, \frac{5}{2 \cdot k^2}, \frac{4}{k^3}, \frac{5}{4}, \frac{2}{k}, \frac{25}{8 \cdot k^2}, \frac{5}{k^3}, \frac{25}{16}, \frac{5}{2 \cdot k}, \frac{4}{k^2}, \frac{25}{4 \cdot k^3}, 2\right\}$$

$$\{1., 1.04491, 1.11803, 1.19628, 1.25, 1.33748, 1.39754, 1.49535, 1.5625, 1.67185, 1.78885, 1.86919, 2.\}$$



Hvis tonen a skal stemme i 440 bliver frekvenserne som følger

$$\frac{Lpraet \cdot 440}{1.67185}$$

$$\{263.182, 275., 294.246, 314.839, 328.977, 352., 367.807, 393.548, 411.221, 440., 470.793, 491.935, 526.363\}$$

Skriv frekvenserne ind i tonegeneratoren Stemning1.

Brug transponering til at lytte til alle treklangene.

Hvilke nogen lyder dårligt? Hvilke lyder godt?

Prøv om du kan forklare det ud fra frekvensforholdene.

SVAR:

De dårlige er især H Gis og Fis men Cis er heller ikke køn

Hvorfor bliver treklangene H Gis og Fis særlig grimme?

I den rene treklang har vi frekvensforholdene til grundtonen: 1   5/4 3/2

I Hdur har vi (fordi det i virkeligheden ikke er tertsen dis men istedet es der bliver spillet)

$$Lh := \left\{1, \frac{\frac{4}{k^3}}{\frac{25}{8 \cdot k^3}}, \frac{\frac{25}{8 \cdot k^2}}{\frac{25}{8 \cdot k^3}}\right\} \qquad \left\{1, \frac{32}{25}, k\right\}$$

$$Lgis := \left\{1, \frac{2}{\frac{25}{16}}, \frac{\frac{4}{k^3}}{\frac{25}{16}}\right\} \qquad \left\{1, \frac{32}{25}, \frac{64}{25 \cdot k^3}\right\}$$

mens

$$Lc := \left\{1, \frac{5}{4}, k\right\} \qquad \left\{1, \frac{5}{4}, k\right\}$$

og

$$Ld := \left\{1, \frac{\frac{25}{8\cdot k^2}}{\frac{5}{2\cdot k^2}}, k\right\} \qquad \left\{1, \frac{5}{4}, k\right\}$$

hvilket ikke er så overraskende fordi D-F# er en af de rene tertser. Sætter vi værdien for k ind får vi

$$k := \sqrt[4]{5} \qquad 1.49535$$

$$Lh := \left\{1, \frac{\frac{4}{k^3}}{\frac{25}{8\cdot k^3}}, \frac{\frac{25}{8\cdot k^2}}{\frac{25}{8\cdot k^3}}\right\} \qquad \{1., 1.28, 1.49535\}$$

$$Lgis := \left\{1, \frac{2}{\frac{25}{16}}, \frac{\frac{4\cdot 2}{k^3}}{\frac{25}{16}}\right\} \qquad \{1., 1.28, 1.53124\}$$

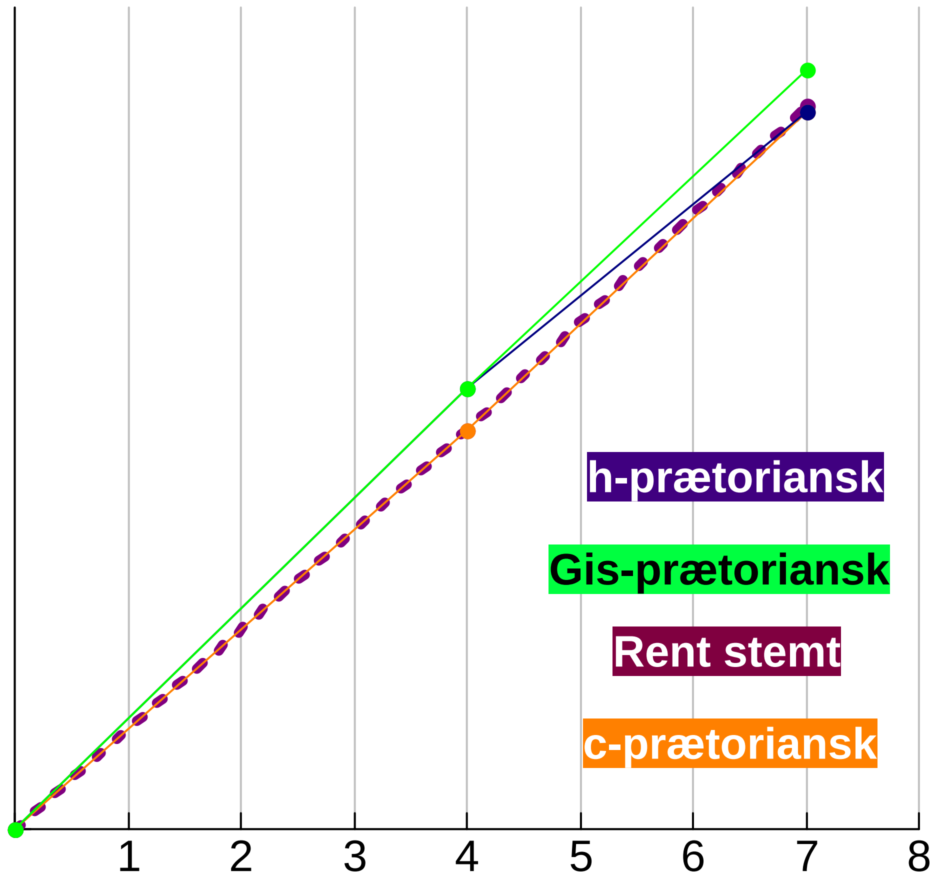
mens

$$Lc := \left\{1, \frac{5}{4}, k\right\} \qquad \{1., 1.25, 1.49535\}$$

og

$$Ld := \left\{1, \frac{\frac{25}{8\cdot k^2}}{\frac{5}{2\cdot k^2}}, k\right\} \qquad \{1., 1.25, 1.49535\}$$

$$Lren := \left\{1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right\} \qquad \{1., 1.25, 1.5\}$$

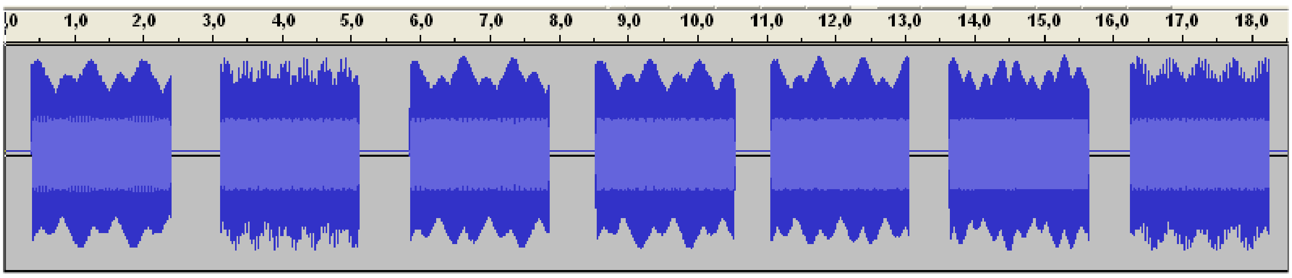


Den rent stemte treklang er markeret med stiplet

Vi kan se at der ikke er så stor forskel på den rent stemte og den prætorianske i c.

I H-dur ligger tertsen alt for højt og i Gis-dur ligger kvinten også helt galt.

Og hvis vi indspiller lydene kan vi faktisk SE hvor problemerne er:



C-god cis-dårlig d-god es-god e-god f-god fis-dårlig

Vi ser hvordan konflikten viser sig i et mere takket svingningsmønster